Numere complexe

Forma algebrică

1. Să se calculeze:
   a) $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{53}$
   b) $(1 + i)^{52}$
   c) $\left(\frac{2+5i}{5-2i}\right)^{2017}$
   d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{75}$
   e) $(1 + i)^{122}$
   f) $\left(\frac{3+4i}{4-3i}\right)^{2016}$
   g) Să se determine modulul numărului complex $z = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^{100}$.
   h) Să se determine modulul numărului complex $z = \frac{(1-i)\left(1-i\sqrt{3}\right)^{10}}{(2+2i)^{12}}$.

2. Să se determine $z \in \mathbb{C}$, astfel încât:
   a) $|z| - z = 2 - 4i$.
   b) $z + 2\bar{z} = iz - 7$
   c) $2|z| + z = 13 - 4i$
   d) $4\bar{z} - (6 + 8i)z = i$
   e) $-z^2 + 2z - 5 = 0$
   f) $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$
   g) $z^2 - 5z + 8 = 0$
   h) $z^2 - (5 - 4i)z + 3(1 - 3i) = 0$

3. Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = 1$. Să se arate că $\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

4. Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = 1$. Să se arate că $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$.

5. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 z_2 z_3 \neq -1$. Să se arate că

$$\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{1+z_1z_2z_3} \in \mathbb{R}.$$